Leçon 219 - Extremums : Existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Ici, on se donne $f : E \to \mathbb{R}$ avec E un $\mathbb{R}$-ev normé. On cherche à minimiser/maximiser f sur une partie C de E. Quitte à regarder -f, on peut parfois ne regarder que les minima.

1. Existence et unicité d'un minimum. —

Def : Minimum/maximum local/global/strict de $f : C \to \mathbb{R}$.

1. *Compacité et coercivité.* —

- Thm : Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
- App : Pour C un compact de E et F un fermé de E disjoint de C, la fonction $x \in \mathbb{C} \mapsto d(x, F)$ atteint son minimum $d(C, F)$.
- Def : Coercivité : Pour C non-bornée, $f : C \to \mathbb{R}$ est coercive si $f(x) \to_{\|x\| to +\infty} +\infty$.
- Ex : Toute norme sur E est coercive.
- Contre-ex : Une forme linéaire n'est pas coercive.
- Pro : Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et non-borné, alors toute $f : C \to \mathbb{R}$ continue et coercive atteint son minimum.
- App : Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.
- Pro : Si C est un espace métrique complet et $f : C \to \mathbb{R}$ est continue et coercive, alors f atteint son minimum dans C.

2. *Convexité.* —

- Pro : La somme de fonct convexes est convexe, la limite simple aussi.
- Thm : En dimension finie, si f est convexe alors f est continue.
- Ex : $f(x) =< Ax, x >$ est convexe ssi A symétrique positive, et fortement convexe ssi A symétrique définie positive.
- Ex : Les normes sur E sont convexes.
- Pro : Si f est convexe, tout minimum local est global.
- Pro : Si f admet des extrema et est strictement convexe, alors elle a un unique minimum.
- Pro : Si f est strictement convexe et continue, alors elle est coercive et admet un unique minimum.
  En dimension finie, ce minimum est toujours atteint.

3. *Extremum sur un Hilbert.* —

- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique $p(x) \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait : $< x - y, p(x) - y > \leq 0$.
  Le projeté minimise aussi la distance : $\|x - p(x)\| = d(x, C)$.
- Pro : On a $|p(x) - p(y)| \leq |x - y|$. L'application de projection est 1-Lipschitzienne, donc continue sur E.
- Pro : Si C est un s-ev fermé, alors p est linéaire, donc linéaire continue.
- Cor : Pour F un s-ev de E, $E = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.
- Théorème de Stampacchia : Soit H un Hilbert et K convexe fermé non vide. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue, tq $|a(u, u)| \geq c\|u\|^2$ pour un $c > 0$.
  Alors pour toute $L \in H^*$ il existe un unique $u \in K$ tq : $\forall v \in K$, $a(u, v-u) \geq L(v-u)$.
  Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique élément de K minimisant la fonctionnelle $v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$.
- Théorème de Lax-Milgram et son EDP dans H^1_0.
- **Dev** : Optimisation dans un Hilbert : Soit H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, et convexe. Alors f atteint son minimum dans H.
  De plus, pour une suite $(a_n)_n$ telle que $f(a_n) \to inf(f)$, $(a_n)_n$ possède des valeurs d'adhérence pour la convergence faible, et une telle valeur d'adhérence α vérifie $f(\alpha) = inf(f)$.
- Rem : L'existence de valeur d'adhérence faibles de suites minimisantes, et leur propriété de minimisation, permet l'étude de solutions faibles d'équations différentielles dans des espaces de Hilberts comme les espaces de Sobolev.

4. *Extremum d'une fonction holomorphe.* —

- On suppose pour cette partie que $E = \mathbb{C}$ et que f est holomorphe sur $\Omega \in \mathbb{C}$, avec Ω connexe.
- Thm : Propriété de la valeur moyenne $\forall B(z, r) \subset \Omega$ on a : $f(z) = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt$.
- Théorème : Une fonction est holomorphe sur Ω ssi elle vérifie la propriété de la valeur moyenne pour tout $B(z, r) \subset \Omega$.
- Principe du maximum : Une fonction holomorphe qui atteint son maximum en module dans Ω est constante.
- Cor : Une fonction holomorphe ne s'annulant pas qui atteint son minimum en module dans Ω est constante.
- Cor : Si $|f|$ admet un minimum local sur Ω, alors il est nul.
- App : Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.

2. Caractérisation et propriétés d'un extremum local. —

1. *Conditions d'optimalité du premier ordre.* —

- Def : Condition du premier ordre.
- Def : Point critique
- Contre-ex : x^3 dont la dérivée et la dérivée seconde s'annulent en 0 mais qui n'a pas de minimum en 0.
- Théorème de Rolle : Pour f continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b) = 0$, on a $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Théorème de Darboux : Pour f dérivable sur I un intervalle, $f'(I)$ est un intervalle.
- Rem : Ces deux théorèmes permettent de chercher les points critiques.
- Suite du point de Fermat.

2. *Conditions d'optimalité du second ordre.* —

- Def : Conditions du second ordre.

- Contre-ex : x^2-y^3, x^2+y^4.
- Rem : Ces conditions correpondent à la forte convexité de f.
- Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et tq $D^2_x(f)$ soit non-dégénérée de signature (p,q).
  Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et $g : V \to W$ un C^1-difféomorphisme tel que $\forall y \in W$, $f(g^{-1}(y)) = f(x)+y_1^2+\cdots+y_p^2-(y_{p+1}^2+\cdots+y_{p+q}^2)$.
- App : Si on a un point critique x en lequel la hessienne de f est non-dégénérée, alors c'est un minimum ssi la hessienne est de signature (n,0), et c'est un maximum ssi la hessienne est de signature (0,n).
  Si la hessienne est de signature (p,n-p) avec $p(n-p) \neq 0$, alors on aura des directions e pour lesquelles x sera un minimum local de $h \in \mathbb{R} \mapsto f(x+he)$ et d'autres pour lesquelles x sera un maximum local de $h \in \mathbb{R} \mapsto f(x+he)$.
- App : Cas $n = 2$. On regarde le signe $Tr(A) = r + t$ et $det(A) = rt - s^2$ pour déterminer la signature de A. Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t > 0$, alors la signature est (2,0). Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t < 0$, alors la signature est (0,2). Si $rt - s^2 < 0$, alors la signature est (1,1).

3. *Conditions d'optimalité sous contraintes.* —

- Théorème des extrema liés.
- App : Démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique.
- App : Emballage optimal d'une boîte.
- App : Application à la diagonalisation des endomorphismes symétriques.
- App : Inégalité de Hadamard.

3. Recherche numérique. —

1. *Méthode de Newton.* —

- Def+Pro : On dit que u_n converge quadratiquement vers s ssi il existe $0 < M < min(1, \frac{1}{|u_0-s|})$ tel que $|u_{n+1} - s| \leq M.|u_n - s|^2$.
  On a alors $|u_n - s| \leq \frac{M^{2^{n+1}}}{M}.|u_0 - s|^{2^n} \leq M^{2^n}\frac{(M|u_0-s|)^{2^n}}{M}$.
- **Dev** : Méthode de Newton polynomiale : Pour P un polynôme réel à racines réelles simples $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$, la fonction $\Phi : x \in [\lambda_r, +\infty[\mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \in [\lambda_r, +\infty[$ est bien définie.
  Pour tout $x_0 \in [\lambda_r, +\infty[$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge linéairement vers λ_r et quadratiquement àpcr.
- App : Cela permet d'approcher rapidement des zéros de polynômes comme $x^2 - a$. Si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $x_n \in \mathbb{Q}$.
- Rem : La méthode de Newton peut être appliquée à des fonctions $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles on a $x \in U$ tel que $\varphi(x) = 0$, φ est de classe C^2 sur U, et $D(\varphi)_x$ inversible.
  Il existe alors un voisinage V de x sur lequel $\Phi : x \in V \mapsto x - (D(\varphi)_x)^{-1}(\varphi(x)) \in V$ est bien définie, et pour tout $u_0 \in V$, $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ va converger quadratiquement vers x.
- Rem : Dans le cas réel avec $U =]a, b[$, on a des cas particuliers où le voisinage V est d'une forme plus commode.
- Rem : Cela permet d'approcher des points fixes répulsifs.

2. *Méthodes de gradient.* —

- But : On remplace la recherche de la solution à $Ax = b$ par la recherche d'un minimum local à la fonction $< Ax, x > - < b, x >$, pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Lemme de Kantorovich
- Méthode du Gradient à pas optimal
- Rem : On a aussi la méthode du gradient à pas conjugué.

Références

Rouvière : Coercivité. Problème des moindres carrés. Suite du point de Fermat. Lemme de Morse.
Objectif Agrégation : Convexité. Appli du th des extrema liés. Formule de la moyenne, principe du maximum. Conditions du premier ordre, exemples. Conditions du second ordre. Méthodes de descente. Méthode de Newton polynomiale. (Dev)
Lafontaine : Immersion,submersion. Sous-variétés, vecteurs tangents, espaces tangents.
Gourdon : Continue sur un compact, applications. Th de Rolle, Th de Darboux. Th des extrema liés.
Pommellet : Polynôme de meilleure approximation.
Ciarlet : Optimisation dans un Hilbert. (Dev)
Rombaldi : Convexité.
Amar, Matheron : Formule de la moyenne, principe du maximum.
Brézis : Projection sur un convexe fermé, Stampacchia, Lax-Milgram + EDP.
Hiriart-Urruty : Gradient à pas optimal.

November 5, 2020

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes